CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DINÂMICAS E EXPLORAÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS: REFLEXÕES EM TORNO DE UM PROBLEMA DA OBM

HANNAH D. G. LACERDA, GUILHERME A. VAZ, ERIQUE E. G. DA SILVA, SAMUEL M. DA SILVA (IFPB, Campus Patos)

E-mails: hannah.lacerda@ifpb.edu.br; guilherme.vaz@ifbp.edu.br; erique.enrique@academico.ifpb.edu.br; samuel.melo@academico.ifpb.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.00.00-8 Matemática

Palavras-Chave: Geogebra; BNCC; Geometria; Olimpíadas de Matemática; Softwares de Geometria Dinâmica.

1 Introdução

O projeto *"A Olimpíada Brasileira de Matemática e sua articulação com o currículo do Ensino Médio"*, financiado pelo CNPq, em parceria com o Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (GEPECM), tem como principal intuito a análise das provas da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a investigação de seus respectivos problemas, mediante a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o devido aprofundamento nos temas necessários.

Durante o processo de estudo da prova de 2017 da OBM, deparamo-nos com um problema de geometria plana de considerável complexidade, que acarretou uma série de discussões e levantou pontos interessantes, a saber, a possibilidade de uma solução por geometria analítica e a importância do software Geogebra para a construção e interpretação de problemas geométricos, além de temas avançados, derivados do problema original.

Dentre as questões de geometria, existem dois conjuntos distintos de problemas que vale mencionar: aqueles cuja representação pictórica é deixada à interpretação textual do leitor e aqueles que trazem consigo a correta construção do enunciado (DUVAL, 1999). A referida questão se encaixa no primeiro grupo, decorrendo daí a escolha do software livre Geogebra, um software de geometria dinâmica, para a construção da representação, sobre o qual elaboramos os resultados aqui propostos, que também permitiu compreender a resolução em estudo. Tal abordagem resultou na compreensão de que, além da solução lógico-dedutiva e sintética, havia uma solução analítica para o problema.

Ademais, a resolução do problema é recheada de fatos lógicos interligados, um tipo de demonstração de dificuldade elevada, de nível aquém do que normalmente é explorado no Ensino Médio. Deste modo, vimo-nos obrigados a nos debruçar sobre os teoremas e conceitos explorados na resolução, mas sempre traçando um paralelo com o que é proposto na BNCC.

2 Materiais e Métodos

Para o estudo do problema, utilizamos a prova disponível no próprio site da OBM e a resolução de Jonatan de Lima[1], competidor da olimpíada. Utilizamos também o site do software de geometria dinâmica Geogebra para construir a figura, interpretando com ela tanto o enunciado quanto a resolução.

Resolvemos os quatro primeiros problemas da prova[2] de 2017 da Olimpíada Brasileira de Matemática, tratando-os individualmente e só avançando uma vez que a questão foi devidamente destrinchada, com o máximo possível de conceitos e resultados extraídos. Cada problema foi dividido em seminários, nos quais houve o estudo da resolução e de cada conteúdo que nela aparecesse, buscando sempre elucidá-los e conectando-os à BNCC.

No que tange ao terceiro problema da prova, sua resolução, proposta pelo competidor Jonatan de Lima, consistia em uma série de fatos intermediários que guiavam o leitor até o fato final, que encerrava a demonstração. Desse modo, dividimos o estudo em diversas apresentações que visavam compreender as ferramentas e fatos que eram utilizados, para alcançar a compreensão da situação. O Geogebra constitui uma ferramenta fundamental nesse

[1] Disponível em www.noic.com.br. Último acesso em 02 de agosto de 2021.
[2] Disponível em www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos. Último acesso em 17 de agosto de 2021.

processo de exploração, por nos oferecer uma outra representação: da qual tiramos uma demonstração menos formal, mas que sanou a necessidade do problema.

3 Resultados e Discussão

Um enunciado geométrico complexo, que encerra informações implícitas e explícitas, tem grande relação de dependência com a possibilidade de representação pictórica e construtiva da situação. Diante dessa necessidade, para que se obtivesse a mais acurada interpretação, que se introduziu a ferramenta Geogebra, o qual, devido a sua própria interface de funcionamento, permitiu-nos visualizar claramente o que é dito na questão. Sendo assim, o software se tornou uma ferramenta indispensável nos passos da resolução, pois nele pudemos identificar cada ponto em específico, traçar segmentos auxiliares que levaram a uma construção sem erros, e acompanhar dinamicamente cada fato proposto na resolução.

A possibilidade de construir e manipular figuras através dos softwares de geometria dinâmica é porta de entrada para engajar os alunos na resolução de problemas que envolvem a análise de propriedades e relações geométricas (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015). Existem evidências de que as tecnologias utilizadas para representar problemas ajudam os alunos a imergir numa linha de raciocínio que os faz perceber conjecturas e relações matemáticas - fatos lógicos que estariam consideravelmente distantes dos estudantes, devido ao seu alto grau de abstração (SANTOS-TRIGO, 2007).

Um dos aspectos que merece destaque no trabalho com o Geogebra são as figuras que se obtêm, mais controladas e precisas, em contraposição com as atividades geométricas apenas levadas a cabo com lápis e papel. As figuras ou construções feitas em ambientes de geometria dinâmica se comportam de acordo com as leis da geometria, isto é, refletem todas as consequências teóricas das propriedades que as definem. Por exemplo, quando se constrói um triângulo e as suas medianas, ao arrastar um vértice para transformar o triângulo, a série de figuras que surgem são triângulos e arrastam consigo as medianas mantendo-as como tais. Assim, para cada figura são válidas as propriedades que derivam da teoria como, por exemplo, que as medianas são concorrentes e se cortam na razão de dois para um. Essas aprendizagens tornam-se mais significativas e mais fáceis de obter com o recurso a um ambiente de geometria dinâmica (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015). Daí, embora tal demonstração não seja lógico-dedutiva, ela não deixa de expressar níveis importantes de generalidade. Vale notar que a construção elaborada dependeu dos seminários, na medida em que estes apresentaram os fatos parciais e os conceitos subjacentes à questão, como a homotetia, o Teorema de Monge D'alembert, etc.

Através da leitura do enunciado do problema - "*um quadrilátero ABCD tem círculo inscrito ω e é tal que as semirretas AB e DC se cortam no ponto P e as semirretas AD e BC se cortam no ponto Q. As retas AC e PQ se cortam no ponto R. Seja T o ponto de ω mais próximo da reta PQ. Prove que a reta RT passa pelo incentro do triângulo PCQ*"[2] - chegamos à seguinte análise: sabemos que a distância é uma função contínua, que nesse caso está restrita a um segmento de reta e a uma circunferência, ambos conjuntos limitados e fechados do plano. Daí que, considerando resultados mais gerais, como o Teorema de Weierstrass, que existem pontos da circunferência que executam uma distância máxima e uma distância mínima, sendo essa última a forma de comprovar a existência do ponto T.

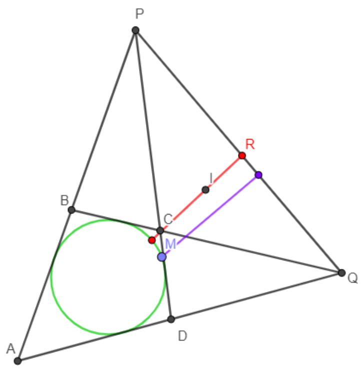

Figura 1 – Representação do problema com destaque para o processo dinâmico da distância. Autoria nossa.

Diz-se que T da circunferência ω é o ponto mais próximo da reta PQ, sendo essencial à resolução do problema. Na figura, o ponto vermelho na circunferência verde; enquanto que o segmento vermelho representa a distância mínima; o outro segmento colorido é dinâmico e se movimenta na circunferência. Logo, derivando do problema um aprofundamento, vemos que ele está relacionado a conhecimentos da Análise e Topologia de funções do plano. Portanto, convém destacar o grau de profundidade que uma questão da OBM pode chegar, exigindo conhecimentos estudados no nível superior. Ainda, o Geogebra também foi utilizado como meio de validar com um modelo a solução escrita pelo aluno Jonatan de Lima, de caráter mais formal. Tal solução é uma sequência lógica de passos que costuma ser denominada de demonstração. Tratemo-la.

Balacheff (2002) admite que, em educação, não existe consenso acerca do que é exatamente prova e demonstração e defende a importância de distinguir estes dois conceitos. Para esse autor, a prova é como uma explicação aceita por uma comunidade, sendo reconhecida pela mesma como convincente. A demonstração, por seu lado, é a prova aceita na pesquisa em Matemática, respeitando regras dedutivas e indutivas que são trabalhadas sobre objetos matemáticos teóricos, usando uma linguagem formal e rigorosa (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015). Também Godino e Recio (1997) e Hersh (1997) distinguem prova de demonstração. A prova é vista como uma cadeia de argumentos que permitem chegar a uma conclusão, através de raciocínios lógico-dedutivos, enquanto a demonstração utiliza uma linguagem formal como requisito de rigor (AMADO, SANCHEZ, PINTO, 2015).

Assim, tomamos a prova no sentido de explicitar passos lógicos que cheguem a uma conclusão verdadeira. Nesse sentido, podemos configurar a construção e verificação no Geogebra como uma prova, autoral e própria, consequência do projeto. Ao invés de seguirmos rigorosamente o caráter sintético da geometria plana, que dispensa informações do referencial ou do modelo, seguimos a ideia de provar o problema via geometria dinâmica, que possui forte embasamento nos elementos do modelo usual bidimensional dado pelo plano cartesiano.

4 Considerações Finais

Na visualização do problema, nos moldes descritos, que inclui leitura, resolução, seminários e o uso da geometria dinâmica no software Geogebra, aplicamos a teoria das múltiplas representações à compreensão de um problema conceitualmente complexo, que tinha em si inúmeras definições e conceitos subjacentes. Despertou a possibilidade de uma solução analítica, que foi conduzida por mostração no Geogebra. Note-se que tal abordagem nos levou a conceitos da Análise, para interpretar a existência do ponto minimal da distância e garantir os resultados. No processo foi desenvolvida uma sequência de comandos que permite trabalhar homotetias e que no futuro poderá ser útil em discussões pedagógicas em torno do problema da semelhança de figuras planas e espaciais, relacionado à BNCC.

Agradecimentos: ao IFPB, ao CNPq, ao GEPECM, ao campus Patos e à Coordenação de Pesquisa do campus Patos.

Referências

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. **A Utilização do Geogebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler.** Rio Claro (SP): BOLEMA, v. 29, n. 52, pp. 637-657, agosto de 2015.

BALACHEFF, N. **The researcher epistemology:** A deadlock from educational research on proof. In: LIN, F. L. (Ed.) International conference on mathematics: understanding proving and proving to understand. Taipei, Taiwan: NCS and NUST, pp. 23-24, 2002.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, 1999.

GODINO, J.; RECIO, A. **Meaning of proofs in mathematics education**. In: 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1997. Helsinki: University of Helsinkia, pp. 313-320, 1997.

HERSH, R. **What is mathematics, really?** New York: Oxford University Press, 1997.

SANTOS-TRIGO, M. **Mathematical Problem Solving:** An Evolving Research and Practice Domain. ZDM, Heidelberg, v. 39, n. 5-6, pp. 523-536, julho de 2007.